

弹性扭转约束下矩形薄壁悬臂梁屈曲分析

王鹏飞 曹其新

(上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

摘要 针对远距离维护机器人关键结构件(矩形截面薄壁梁)轻量化、薄壁化设计后发生的屈曲问题, 为避免薄壁结构件发生失稳现象, 提出了基于瑞利-里兹能量变分法建立屈曲应力计算模型, 以及基于弹性薄板理论构件容纳屈曲半波数、矩形几何尺寸和边界扭矩约束刚度等因素的数学模型的融合方法. 将矩形薄壁梁简化为四个非载荷端承受弹性扭转约束的薄壁矩形板件, 为矩形梁屈曲分析提供了一种实用方法. 运用有限元方法对矩形薄板组成的悬臂梁进行仿真分析, 所得结果与理论计算值具有一致性, 验证了方法的正确性.

关键词 矩形薄壁梁; 弹性屈曲; 变分法; 临界载荷; 有限元法

中图分类号 TP242.2 **文献标志码** A **文章编号** 1671-4512(2015)S1-0445-03

Buckling analysis of thin-walled rectangular cantilever beam with elastic rotational constraint

Wang Pengfei Cao Qixin

(State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai
Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract The thin-walled structural instability phenomenon was considered for the buckling analysis after the lightweight and the thin-wall design of the key component for the long-distance maintenance. A local buckling stress calculation model based on Rayleigh-Ritz variational method was proposed. A calculation model based on elastic buckling theory of thin-walled plate was presented simultaneously, which considers buckling half wave number, rectangular geometry dimension and boundary constraint. The thin-walled rectangular cantilever beam was reduced to four thin-walled plate, which was loaded elastic rotational restraint along unloaded edge. A practical method of buckling analysis for rectangular cantilever beam was proposed. And the finite element simulation of cantilever beam composed by rectangular thin-walled plate was carried out. The effectiveness of the proposed methods was verified by the finite element method simulation result, which was consistent with the theoretical calculating value.

Key words thin-walled rectangular beam; elastic buckling; variation; critical load; finite element method

随着核聚变工程研究的深入, 远距离维护机器人作为特种机器人的一种, 即将在 TOKA-MAK 核聚变试验中承担极其重要的检修及维护任务. 为保证机器人在核聚变设施内的维护操作安全可靠, 其关键结构连接件(矩形截面薄壁梁)

设计时须在考虑薄壁化、轻量化的同时, 确保其具有极好的抗失稳能力. 传统理论分析通常将薄壁板件的边界条件简化为简支、固支或夹支, 但实际应用中, 矩形截面薄壁梁作为连接结构件, 通常固连在某些辅助支撑结构上, 连接部位承受的约束

收稿日期 2015-06-30.

作者简介 王鹏飞(1979-), 男, 博士研究生, E-mail: wpf790714@sjtu.edu.cn.

基金项目 科技部国际热核聚变实验堆(ITER)计划专项资助项目(2011GB113005).

具有弹性扭转特征,尤其在承受较大载荷且分布不均衡情况下极为明显。

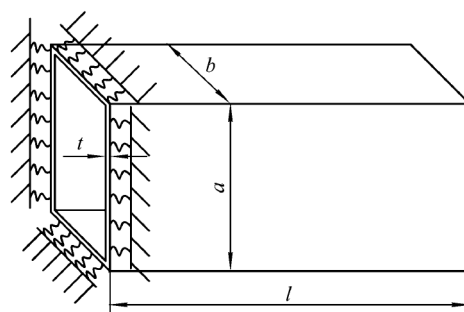
国内外众多文献对不同环境下薄板屈曲问题进行了系列研究,成果显著.文献[1-4]运用瑞利-里兹能量变分法对面内承受剪力和轴力复合板屈曲问题进行了理论研究.文献[5]采用有限域积分变换法对载荷作用下矩形悬臂薄板挠度和内力精确解进行了相应研究,还利用辛几何方法和本征函数展开的方法分别对矩形悬臂薄板^[6]和厚板^[7]屈曲问题进行了解析解分析.文献[8]对单一轴载荷作用下梁的小振幅屈曲问题进行理论分析和实验对比研究,并考虑了梁移动面的接触情况.文献[9]对夹层梁在不同载荷作用下的解析解进行了研究.但迄今为止,针对悬臂矩形薄壁梁在弹性扭转约束下承受多种载荷作用的屈曲性能研究仍然不够充分。

本研究采用瑞利-里兹变分法,对非载荷端受弹性扭转约束、承受不均衡外载荷和侧向弯矩的矩形薄板屈曲问题进行理论分析,并将其简化后应用于矩形截面薄壁梁失稳分析,为解析法分析远距离维护机器人连接结构件在承受转动约束条件下屈曲问题提供理论依据和解决策略.该计算模型全面考虑了屈曲半波数、悬臂梁截面尺寸和弹性扭转约束刚度等关键因素.鉴于复杂微分方程求解繁琐,本研究将计算模型与有限元法结合,使悬臂矩形薄壁梁的受力分析更加简洁有效。

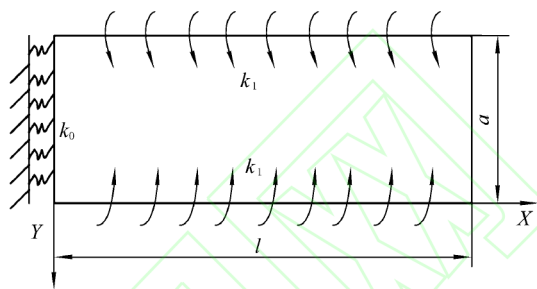
1 矩形薄壁梁约束机理

作为远距离维护机器人核心结构连接件,薄壁矩形截面梁呈现悬臂结构.鉴于远距离维护和末端大负载需求,悬臂梁主要承受大的压载荷和不均衡弯矩载荷.矩形梁约束端承受较大弯矩载荷时,具有明显的弹性转动约束特征,介于简单支撑和固定连接之间,这与传统板件稳定性分析中简支边界、夹支边界或固支边界的简化方式并不相符.因此,本研究针对远距离维护机器人实际情况,将约束端简化为刚度 k_0 的弹性扭转约束,如图 1 所示。

采用弹性薄板理论,将矩形薄壁梁视作 4 个薄壁矩形板弹性约束连接,其连接方式视作弹性扭转约束.矩形板之间的弹性扭转约束刚度为 k_1 ,如图 1 所示.通过这种方式,将悬臂矩形截面梁简化为求解悬臂矩形薄板问题。



(a) 弹性扭转约束悬臂梁



(b) 弹性扭转约束薄板

图 1 矩形薄壁悬臂梁简图

2 弹性约束悬臂矩形板计算模型

设矩形板长、宽和厚分别为 l, a 和 t , 约束边弹性扭转刚度为 k_0 , 约束边的对边为自由边(承受外载荷 M), 其余两边为弹性扭转约束边(弹性扭转刚度为 k_1), 见图 1(b)。

弹性矩形板基本微分方程为

$$D \left[\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right] = q,$$

式中: D 为矩形板抗弯刚度; $\omega(x, y)$ 为矩形板挠曲函数; q 为外载荷。

矩形板的抗弯刚度为

$$D = Et^3 / \{12[(1 - \nu^2)]\},$$

式中 E 和 ν 分别为板材的弹性模量和泊松比。

矩形板的挠曲函数^[1]

$$\omega(x, y) =$$

$$\left[\frac{y}{a} + \phi_1 \left(\frac{y}{a} \right)^2 + \phi_2 \left(\frac{y}{a} \right)^3 \right] \sum_{m=1}^M l_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (1)$$

式中: ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3 为由运动边界条件确立的待定系数; m 为沿长度 l 方向上的屈曲半波数; l_m 为相应的未知系数。

与图 1(b) 约束相对应的边界条件为

$$\omega(x, 0) = 0;$$

$$M_x(l, y) = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{x=l} = -k_0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=l};$$

$$M_y(x, 0) = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -k_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=0};$$

(2)

$$M_y(x, l) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=l} = -k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=l}.$$

将式(1)代入式(2),解得:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M l_m &= 0; \\ \psi_1 &= \frac{ak_1}{2D} = \frac{6ak_1(1-\nu^2)}{Et^3}; \\ \psi_2 &= \frac{a^2k_1(D+l-1)}{3Dl(2l-1)} = \\ &= \frac{a^2k_1}{3l(2l-1)} + \frac{4a^2k_1(l-1)(1-\nu^2)}{Et^3l(2l-1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

悬臂矩形板内弯曲应变能为

$$U_e = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^l \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

悬臂矩形板边界弹性约束势能为

$$U_k = \frac{1}{2} k_0 \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^2 dy + \frac{1}{2} k_1 \cdot \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k_1 \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=a} \right)^2 dx.$$

外载荷中轴向载荷分量 F_x 对悬臂矩形板做功为

$$V_x = \frac{1}{2} F_x \int_0^a \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy.$$

外载荷产生的剪力分量 τ 对悬臂矩形板做功为

$$V_\tau = -\tau \int_0^a \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy.$$

由瑞利-里兹能量变分法,得出:

$$\begin{aligned} \Pi &= U_e + U_k - V_x - V_\tau = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial l_m} &= 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (4)$$

将薄板的各项基本参数数值代入式(3)即可求得相应的挠曲函数 $w(x, y)$. 解式(4)得到关于 l_m 的线性方程组,令其系数矩阵行列式为零,即可求得相应的临界屈曲载荷.

下面将提出的计算模型及边界条件通过有限元方法对悬臂矩形薄壁梁进行仿真验证,并与精确解进行对比,验证其正确性.

3 矩形薄壁梁有限元分析

按照上述计算模型,采用有限元分析软件 ANSYS 对矩形薄壁悬臂梁进行相应建模. 为确保模型衔接正确,矩形板之间连接均在节点上加加载弹性扭转约束,即每块矩形板均有一个固定端弹性约束(刚度 k_0)、一个自由端及两个相邻矩形

板间的弹性转动约束(刚度 k_1).

矩形截面悬臂梁之间的分块板件($a \times l \times t$ 和 $b \times l \times t$)单元形式为 shell63, 尺寸为 125 mm $\times$ 1 000 mm $\times$ 8 mm. 在有限元分析模型中,每块矩形薄板除自由端外,其余连接所体现的弹性约束和弹性支承均使用两种 Combin14 弹簧单元,模拟单自由度扭转和轴向拉压弹簧单元^[10],矩形薄板使用 Shell63 单元,见图 2.

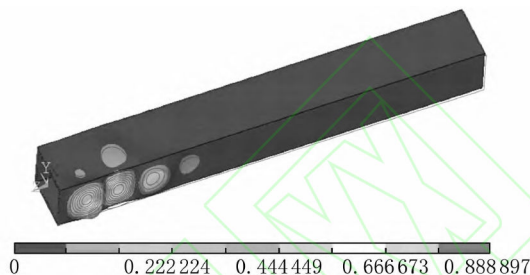


图 2 矩形薄壁梁屈曲分析

材料选用铝合金 7075 进行单元网格划分后,有限元分析结果显示屈曲载荷系数为 65.492 1,可计算得到有限元分析环境下的屈曲载荷为 2 046.63 N $\cdot$ m,与精确计算屈曲应力值相比,差值不超过 5%,两者结果具有一致性.

4 结论

本文建立了基于弹性转动边界约束的矩形薄壁悬臂梁外载荷作用下屈曲分析计算模型,运用该模型便于求解弹性扭转约束下矩形悬臂薄壁梁的屈曲载荷.通过理论计算模型、边界条件和有限元分析方法相结合,悬臂薄壁梁屈曲载荷与实际工况结果一致.

参 考 文 献

- [1] Qiao P Z, Zou G P. Local buckling of elastically restrained fiber-reinforced plastic plates and its application to Bbox sections[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128: 1324-1330.
- [2] Liu Q H, Qiao P Z, Guo X W. Buckling analysis of restrained orthotropic plates under combined in-plane shear and axial loads and its application to web local buckling[J]. Composite Structures, 2014, 111: 540-552.
- [3] Chen Q Y, Qiao P Z. Post-buckling behavior of imperfect laminated composite plates with rotationally-restrained edges[J]. Composite Structures, 2015, 125: 117-126.
- [4] 刘沐宇,陈齐凤,张强. 弹性转动边界约束的组合梁腹板剪切屈曲分析[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2014, 42(1): 84-88. (下转第 472 页)

无解的缺陷.

4 结论

本文提出了基于离散化低维映射 Q 学习的手臂避碰规划算法,在经典 Q 学习算法前加入前向树 Q 学习以得到较好的初始 Q 值和及时可利用的可行规划,之后经过经典 Q 学习算法改良避碰规划,使得机械臂以最短步数,最低消耗到达指定位置,避免了传统 Q 学习算法易陷入无解的缺陷.该算法具有一定的模型通用性和环境适应性,并通过环境与机械臂的仿真包络模型提高了算法的计算效率.

参 考 文 献

- [1] 丛佩超. 空间机械臂抓取目标的碰撞前构型规划与控制问题研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学卫星技术研究所, 2009.
- [2] 孙绍杰, 齐晓慧, 苏立军, 等. 基于人工势场——遗传算法的机械臂避障方法研究[J]. 计算机测量与控制, 2011, 19(12): 3078-3081.
- [3] 谢斌, 刘士荣, 俞金寿. 基于在线图搜索的移动机器人遍历运动规划[J]. 华东理工大学学报: 自然科学版, 2007, 33(4): 551-557.
- [4] 陈华志, 谢存禧. 移动机器人避障模糊控制[J]. 机床与液压, 2004(11): 77-79.
- [5] 张翠. 基于 RBF 神经网络的机械臂运动控制算法及应用研究[D]. 兰州: 兰州交通大学自动化学院, 2014.
- [6] 祁若龙, 周维佳, 王铁军. 一种基于遗传算法的空间机械臂避障轨迹规划方法[J]. 机器人, 2014, 36(3): 263-270.
- [7] 盛巍. 基于多自由度工业机械臂的避障路径规划技术的研究[D]. 无锡: 江南大学自动化学院, 2012.
- [8] Mitchell T M. Machine learning[M]. 曾华军, 张银奎, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2003.
- [9] Beom H B. A sensor-based navigation for a mobile robot using fuzzy logic and reinforcement learning[J]. IEEE Transaction on SMC, 1995, 25(3): 464-477.
- [10] Brian D Z, Nathan R, Garratt G, et al. Planning-based prediction for pedestrians[C] // Proc of the 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. St Louis: IEEE, 2009: 3931-3936.
- [5] 钟阳, 田斌, 李锐. 矩形悬臂薄板精确解分析[J]. 武汉理工大学学报, 2010, 32(8): 102-106.
- [6] 钟阳, 陈静云, 王苏岩. 矩形悬臂薄板的解析解[J]. 计算力学学报, 2006, 23(3): 368-372.
- [7] 钟阳, 张永山. 矩形悬臂厚板的解析解[J]. 工程力学, 2006, 23(2): 52-56.
- [8] Genna F. Small amplitude elastic buckling of a beam under monotonic axial loading, with frictionless contact against movable rigid surfaces[J]. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2014, 9(4): 441-463.
- [9] Douville M A. Exact analytical solutions for the local and global buckling of sandwich beam-columns under various loadings[J]. International Journal of Solids Structures, 2013, 50(16-17): 2597-2609.
- [10] 毛佳, 江振宁, 陈广南, 等. 弹性支承上边界转动约束矩形板屈曲分析[J]. 工程力学, 2010, 27(12): 59-76.

(上接第 447 页)