

文章编号: 1006-2467(2002)08-1138-05

机器人奇异形位分析及协调控制方法

刘成良, 张凯, 曹其新, 付庄, 殷跃红

(上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200030)

摘要: 把6R机器人奇异形位分为边界奇异、内部奇异、结构边界奇异和腕部奇异, 分析了这些奇异形位的形成条件, 并对每一种奇异进行了计算机仿真。在深入分析奇异边界构成的基础上, 给出了内部奇异直观的计算机图形仿真结果, 克服了以往笼统而欠实用描述方法的不足。通过分析 J^{-1} (J 为Jacobian矩阵)提出了采用协调控制法回避机械手奇异形位的理论及在线实时控制方法。

关键词: 机器人; 奇异形位; 协调控制; 计算机仿真

中图分类号: TP 391 **文献标识码:** A

Singular Configuration Analysis and Coordinate Control of Robot

LIU Cheng-liang, ZHANG Kai, CAO Qi-xin, FU Zhuang, YIN Yue-hong

(School of Mechanical and Power Eng., Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030, China)

Abstract: The singularity and coordinate control of robot were studied. A method of solving the approximate velocity of joint by adding damped vector was proposed and a modified algorithm was provided based on the work of Wampler. The singularities were divided into the structure boundary singularity, boundary singularity, inner singularity and wrist singularity. The computer graphic simulations were developed. The inner singularity was studied in detail. The methods of using coordinate control to avoid the singularity of robot arm and real time control were presented.

Key words: robot; singular configuration; coordinate control; computer simulation

Jacobian 矩阵 J 的计算是实现机器人控制的关键, 机器人处于奇异形位时, J 失秩, 失去了一个或几个自由度, 也就是说 J^{-1} 不存在, 某些方向有限的手部速度会要求一些关节速度很大, 并趋向无穷。即使 J^{-1} 存在, 但在奇异形位附近 J 也是病态条件矩阵, 此时某些关节仍需要很大的关节速度, 致使系统不安全。解决这个问题的方法很多^[1], 如Jacobian 矩阵的奇异值分解法(Singular Value Decomposition, SVD)是解机器人逆运动学速度、加速度的重要工具, 但存在实时性差、计算量大的问题; Wampler^[2]

提出在奇异点附近引入阻尼项的方法求得关节速度的近似解; Chen 等^[3]找到了在运动学奇异点附近最小平方阻尼方法更平滑更精确的预测控制算法; Cheng 等^[4]把机械手奇异分成臂部和腕部两部分, 并把奇异方向隔离出来单独进行处理, 提出了解决逆运动学奇异的 SICOP 方法; Gregory 等^[5]则导出了 8 关节冗余度机器人回避奇异点的算法; Seng^[6]讨论了冗余度机械人奇异点可回避的算法问题及 Manja 等^[7]提出的改进 SVD 法等。

本文通过在奇异点附近引入阻尼项, 在 Wampler^[2]和朱向阳等^[8]的基础上给出其修正的算法。对 6R 机器人奇异进行综合分析, 把奇异形位分为结构边界奇异、边界奇异、内部奇异和腕部奇异 4 种情况, 并对每一情况给出了计算机仿真结果。特别是对 6R 机器人内部奇异, 进行了详细的研究分析,

收稿日期: 2001-08-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50128504)

作者简介: 刘成良(1964-), 男, 山东费县人, 教授, 博士, 主要从事机器人、机电控制理论及方法、CAD、网络控制等的研究。

给出直观的图形仿真结果, 解决了以往对此一直采用笼统描述而欠实用的处理方法。在分析 J^{-1} 的基础上, 提出采用协调控制法回避机械手奇异形位的理论及在线实时控制方法

1 机器人结构及参数

采用 RV 12L 6R 机器人进行有关问题的分析, 其结构如图 1 所示

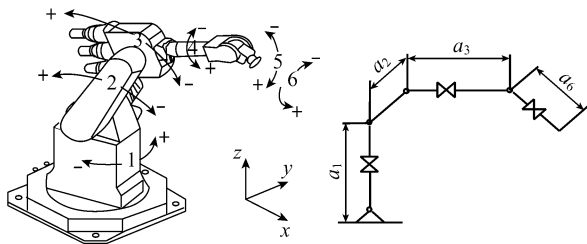


图 1 6R 机器人关节结构图

Fig. 1 Joint structure of 6R robot

RV 12L 的结构参数:

- θ_1 [- 165, 165], θ_2 [- 75, 75]
- θ_3 [- 130, 130], θ_4 [- 180, 180]
- θ_5 [- 105, 105], θ_6 [- 180, 180]
- $a_1 = 0.80 \text{ m}$, $a_2 = 0.70 \text{ m}$, $a_3 = 0.65 \text{ m}$
- $a_6 = 0.26 \text{ m}$, $d_4 = 0.65 \text{ m}$, $d_6 = 0.26 \text{ m}$

其中: θ 为关节的转角范围($^\circ$), a_i 为两个关节轴线之间的距离; d_i 为包含旋转关节的两个关节轴线之间的距离

2 Jacobian 伪逆的算法分析

2.1 Jacobian 伪逆

机器人手爪位姿矢量 $P_E \in R^m$ 与关节位姿矢量 $q \in R^n$ ($n > m$) 关系为

$$P_E = \mathcal{Q}(q)$$

其中, $\mathcal{Q}: R^n \rightarrow R^m$.

在 P 给定的情况下, 相应的关节速度为

$$\dot{q} = J^+(q)\dot{P}$$

其中, $J^+ = J^T [JJ^T]^{-1} \in R^{n \times m}$ 为 Jacobian 矩阵的伪逆, 当 $m = n$ 时(非冗余度机器人) $J^+ = J^{-1}$; 当 $m < n$ (冗余度机器人)时 J^+ 为关节速度的最小范数解

若 q_i 为奇异位姿点时, $\text{rank } J < m$, $JJ^T \in R^{m \times m}$ 为奇异矩阵, J^+ 不存在

2.2 奇异点处理方法

在奇异点附近引入阻尼项^[2] $\lambda^2 \dot{q}^2$, 通过求解下式得 \dot{q} 的近似解:

$$\min_q \dot{P} - J\dot{q}^2 + \lambda^2 \dot{q}^2 = \lambda \cdot 0$$

采用显式表示为

$$\dot{q} = J^T [JJ^T + \lambda I]^{-1} \dot{P}$$

2.3 阻尼项 λ 的取值

若 $\det JJ^T = 0$ 或 $\det J = 0$, 则 $\text{rank } J < m$, 置 $\lambda = \lambda_0$ (通常由实验确定^[2]).

若 $\det JJ^T \neq 0$ 或 $\det J \neq 0$, 是病态条件矩阵, 用下列方法计算:

$$\lambda = \lambda_0 (1 - \bar{k}_0 / K)^2$$

$$K = \max \{ \bar{k}_0, \bar{k}J \}$$

$$\bar{k}J = \left(\frac{2}{m} \right)^{m/2} \frac{J_F^m}{\sqrt{\det JJ^T}}$$

其中: \bar{k}_0 为给定的门限值; $\bar{k}J$ 为 J 的条件数上界; J_F 为 J 的 F 范数; n 为自由度; m 为末端操作空间自由度

3 机器人奇异形位条件分析

以上讨论末端执行器速度的参考点选在腕部中心, 实际应用时应是末端执行器中心点, 两者之间的关系为

$$J_E(\theta) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & 0 \\ 0 & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & 0 \\ 0 & -s_1 & -s_1 & c_1 s_{23} & j_{45} & j_{46} \\ 0 & c_1 & c_1 & s_1 s_{23} & j_{55} & j_{56} \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} & s_{23} s_4 & j_{66} \end{bmatrix}$$

$$J_w(\theta) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & 0 & 0 & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{32} & j_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & -s_1 & c_1 s_{23} & j_{45} & j_{46} \\ 0 & c_1 & c_1 & s_1 s_{23} & j_{55} & j_{56} \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} & s_{23} s_4 & j_{66} \end{bmatrix}$$

其中: $c_1 = \cos \theta_1$; $s_1 = \sin \theta_1$; $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$; $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$; 以此类推 J_E 与 J_w 之间的关系为

$$J_E = \begin{bmatrix} 0 & d_6 Z_{Ek} & -d_6 Z_{Ej} \\ I_3 & -d_6 Z_{Ek} & 0 & d_6 Z_{Ei} \\ & d_6 Z_{Ej} & -d_6 Z_{Ei} & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & & & I_3 \end{bmatrix} J_w = U_{6 \times 6} J_w \quad (1)$$

式中, $Z_E = [Z_{Ei} \ Z_{Ej} \ Z_{Ek}]^T$.

由 $\det U = 1$ 得

$$\det J_w = \det J_{11} \det J_{22} \quad (2)$$

若式(2)右端之一为 0, 即 $\det J_{11} = 0$ 或 $\det J_{22} = 0$,

则 $\det J_w = 0$, 可分别处理位置奇异和姿态奇异. 由 $\det J_{11} = 0$ 可给出前臂奇异即位置奇异的条件, 由 $\det J_{22} = 0$ 可给出腕部奇异即姿态奇异的条件.

现以 RV12L 6R 机器人为例进行奇异分析.

$$J_w = \begin{bmatrix} J_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \begin{bmatrix} -d_4s_1c_{23} - a_2s_1c_2 & -d_4c_1s_{23} - a_2c_1s_2 & -d_4s_{23}c_1 \\ d_4c_1c_{23} + a_2c_1c_2 & -d_4s_1s_{23} - a_2s_1s_2 & -d_4s_{23}s_1 \\ 0 & -d_4c_{23} - a_2c_2 & -d_4c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{22} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & c_1s_{23}s_4 - s_1c_4 & -c_1c_4s_{23}s_5 - s_1s_4s_5 + c_1c_{23}c_5 \\ s_1c_{23} & s_1s_{23}s_4 + c_1c_4 & -s_1c_4s_{23}s_5 + c_1s_4s_5 + s_1c_{23}c_5 \\ -s_{23} & c_{23}s_4 & -s_{23}c_5 - c_{23}c_4s_5 \end{bmatrix}$$

$$\det J_{11} = -a_2d_4s_3(d_4c_{23} + a_2c_2)$$

$$\det J_{22} = -s_5$$

由 $\det J_{11} = 0$ 得

$$\text{sing1} = \{\theta \in \mathbf{R}^6 \mid a_2d_4s_3 = 0\} \quad (3)$$

即 $\theta_5 = 0^\circ$

$$\text{sing2} = \{\theta \in \mathbf{R}^6 \mid d_4c_{23} + a_2c_2 = 0\} \quad (4)$$

式中: sing1 为边界奇异; sing2 为内部奇异.

考虑工具具有一定的长度, 关节 5 的转动范围受结构的限制, 尽管 $\det J = 0$, 关节却达不到此位置, 故将 $\theta_5 = \theta_{5min}$ 和 $\theta_5 = \theta_{5max}$ 称作结构边界奇异.

由 $\det J_{22} = 0$ 给出腕部奇异条件:

$$\text{sing3} = \{\theta \in \mathbf{R}^6 \mid s_5 = 0\} \quad (5)$$

即 $\theta_5 = 0^\circ$

4 机器人奇异综合分析

根据上述分析, 6R 机器人奇异形位大体上分为边界奇异、内部奇异和腕部奇异 3 种情况, 即

$$\text{sing} = \{\text{sing1} \quad \text{sing2} \quad \text{sing3}\} \quad (6)$$

除此之外, 还有一类是由关节限制范围产生的奇异, 此时尽管 $\det J = 0$, 但关节达不到此位置, 称为结构边界奇异.

4.1 结构边界奇异

结构边界奇异发生的条件为

$$\text{sing4} = \{\theta \in \mathbf{R}^6 \mid \theta_i = \theta_{i, \min} \quad \theta_{i, \max}\} \quad (7)$$

式中, $\theta_{i, \min}$ 、 $\theta_{i, \max}$ 分别为第 i 个关节的上下界, 即最大最小角度值. 则式(6)变成

$$\text{sing} = \{\text{sing1} \quad \text{sing2} \quad \text{sing3} \quad \text{sing4}\} \quad (8)$$

以 RV12L 为例, 从三维空间上给出具体的描述. RV12L 有 6 个关节, 因关节 4、6 可以在 360 范围

内转动无结构限制, 所以共有 8 种结构边界奇异, 具体的三维描述为

$$\theta_1 \in [-165^\circ, 165^\circ], \quad \theta_2 \in [-75^\circ, 75^\circ]$$

$$\theta_3 \in [-130^\circ, 130^\circ], \quad \theta_4 \in [-75^\circ, 75^\circ]$$

4.2 边界奇异

边界奇异分析有助于机器人工作空间的确定, 保证机器人能够到达工作空间的任意焊接点. 在进行边界奇异分析时, 须先确定机械手整个奇异边界.

4.2.1 奇异边界的构成 奇异边界是由 $L_1, L_2, L_3, L_4, L_4', L_3', L_2', L_1'$ 组成的封闭曲线, 其形成条件分别为

$$L_1: \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{0, \times, 0, \times, 0, \times\}$$

$$L_2: \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{0, 75^\circ, \times, \times, 0, \times\}$$

$$L_3: \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{0, 75^\circ, 130^\circ, \times, \times, \times\}$$

$$L_4: \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{0, \times, 130^\circ, 0, 105^\circ, \times\}$$

$$L_1' = L_1$$

$$L_2': \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{0, -75^\circ, \times, \times, 0, \times\}$$

$$L_3': \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{0, -75^\circ, -130^\circ, \times, \times, \times\}$$

$$L_4': \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{0, \times, -130^\circ, \times, -105^\circ, \times\}$$

其中, \times 代表任意角度, 即 $\theta_i \in [\theta_{i, \min}, \theta_{i, \max}]$.

上述曲线形成的奇异边界如图 2 所示.

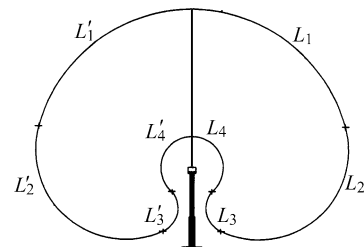


图 2 奇异边界构成

Fig. 2 Composition of singular boundary

4.2.2 奇异曲面的构成 RV12L 机器人的奇异边界曲面由 S_1, S_2, S_3, S_4 组成, 其形成条件为

$$S_1: \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{\times, \times, 0, \times, 0, \times\}$$

$$S_2: \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{\times, \pm 75^\circ, \times, \times, 0, \times\}$$

$$S_3: \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{\times, \pm 75^\circ, \pm 130^\circ, \times, \times, \times\}$$

$$S_4: \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{\times, \times, \pm 130^\circ, 0, \pm 105^\circ, \times\}$$

上述奇异边界曲面如图 3 所示, 将它们相加, 即可确定 RV12L 机器人的工作空间, 如图 4 所示.

4.3 内部奇异

由以上分析可知, 当满足式(4)时, 属于内部奇

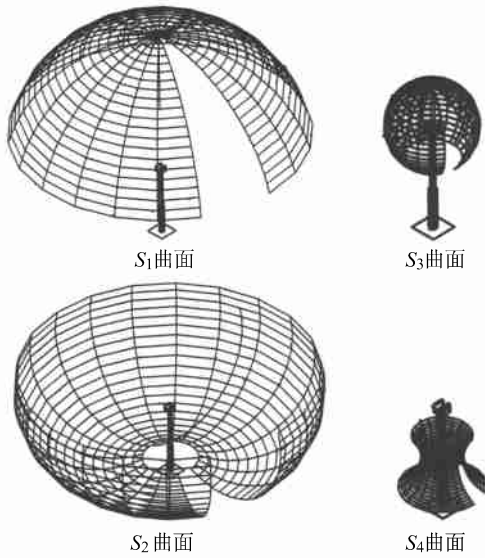


图 3 奇异边界曲面

Fig. 3 Surface of singular boundary

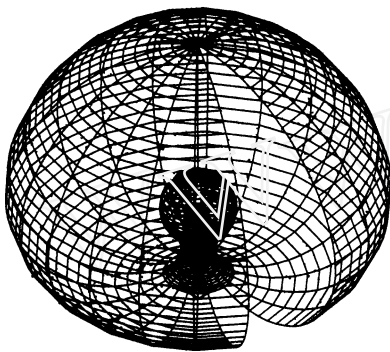


图 4 工作空间

Fig. 4 Working space

异问题 进行内部奇异分析, 是为了确定内部奇异点, 即需要找到满足下式的 θ_2 和 θ_3 :

$$d_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \cos \theta_2 = 0$$

满足上式的 θ_2 和 θ_3 如图 5(a) 所示, 曲线上各点均为内部奇异点 从图可见, 当 $d_4 \neq a_2$ 时, θ_2 和 θ_3 为非线性关系 当 $d_4 = a_2$ 时, 上式变为

$$\cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos \theta_2 = 0$$

满足上式的 θ_2 和 θ_3 如图 5(b) 所示, 此时 θ_2 和 θ_3 之间满足:

$$\theta_3 = \begin{cases} -2\theta_2 - 180^\circ & \theta_2 < 0 \\ -2\theta_2 + 180^\circ & \theta_2 > 0 \end{cases}$$

5 以协调控制法回避机械手奇异形位

机器手处于奇异形位时, 即 J 失秩, 失去了一个或几个自由度, 某些方向的有限的手部速度会要求一些关节速度很大并趋向无穷 这里采用协调控制法来回避奇异形位 设想在不改变手部位姿的条件下, 调整机器人的形位, 使 $|J(\theta)| \neq 0$, 也就是当关

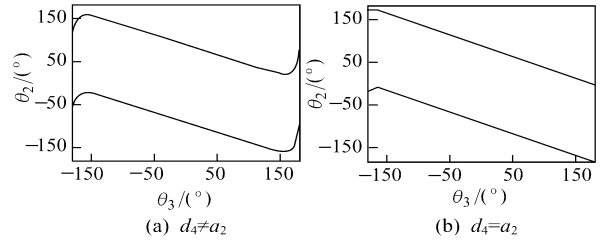


图 5 $\theta_2 - \theta_3$ 曲线

Fig. 5 Dependence of θ_2 versus θ_3

节接近奇异形位时, 采取某一补偿措施回避奇异形位点

5.1 关节角速度分析

对 RV 12L 6R 机器人, 手部的位置由前 3 个关节位置 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 决定, 姿态取决于全部关节变量 同样, 手部线速度取决于前 3 个关节角速度 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 和 $\dot{\theta}_3$, 而角速度与全部关节角速度有关 令:

$$\theta_0 = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T, \quad \theta_1 = [\theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T$$

则有

$$\omega = J_{21} \dot{\theta}_0 + J_{22} \dot{\theta}_1$$

在不考虑 θ_4 、 θ_5 和 θ_6 的影响下, 由上式得

$$\dot{\theta}_4 = \cos \theta_3 \frac{\omega}{\sin \theta_2} - \sin \theta_3 \frac{\omega}{\sin \theta_2} \quad (9)$$

$$\dot{\theta}_5 = \omega \sin \theta_3 - \omega \cos \theta_3 \quad (10)$$

$$\dot{\theta}_6 = \dot{\theta}_4 \cos \theta_3 - \omega \quad (11)$$

由式(9)和(11)可知, 当 $\theta_3 = 0$ 时, 有限的 ω 要求 $\dot{\theta}_4$ 、 $\dot{\theta}_6$, 此时计算机溢出 常用处理办法: 设置奇异临界区使 $\theta_3 > \alpha$ (α 为预先设定的临界值). 当 $\theta_3 < \alpha$ 时用 $\alpha \operatorname{sgn}(\sin \theta_3)$ 代替 $\sin \theta_3$ α 取值既不能过大, 也不能过小 α 过大, 运动偏差大; α 过小, 手部关节会产生高频振动

当 $\theta_3 = 0$ 或 180° 时, 手腕处于奇异形位: $\theta_3 = 0^\circ$ 时, 关节 4 的轴线与关节 6 的轴线共线; $\theta_3 = 180^\circ$ 时, 关节 4 的轴线与关节 6 的轴线重合, 但结构限制关节达不到此位置 RV 12L 机器人的手臂变换矩阵为

$$\begin{aligned} {}^0_6T &= {}^0_1T(\theta_1) {}^1_2T(\theta_2) {}^2_3T(\theta_3) {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) \\ {}^3_6T &= {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) = \\ &= \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4S_6 & -C_4S_5 & 0 \\ S_5S_6 & -S_5S_6 & C_6 & d_4 \\ -S_4C_5C_6 - C_4C_6 & S_4C_5S_6 - C_4C_6 & S_4S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta_4 + \theta_5) & -\sin(\theta_4 + \theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_6 & d_4 \\ \sin(\theta_4 + \theta_5) & \cos(\theta_4 + \theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

由上式可见,末端手部姿态只与 $(\theta_4 + \theta_6)$ 有关因此在保持 $(\theta_4 + \theta_6)$ 不变的情况下,让 θ_4 和 θ_6 按相反的方向转一定的角度 θ_5 转动,关节5的轴线方向就随着变化,这样就使得 $|\dot{\theta}_5| = 0$,从而避开了奇异形位

5.2 协调角的确定

这里讨论 θ_4 和 θ_6 到底要转动多大角度才能消除运动失真 由式(9)得

$$\dot{\theta}_4 \sin \theta_6 = \omega \cos \theta_6 - \dot{\theta}_6 \sin \theta_6 \quad (13)$$

转动 θ_5 使转关节5的轴线 z_5 转到与 ω 在 x_6Oy_6 平面内的投影 ω_y 相同或相反的方向,如图6所示,则有:

$$\omega_x/\omega_y = \sin \theta_5/\cos \theta_5 \quad (14)$$

θ_5 使关节5的轴线旋转的角度称作协调角,控制过程中要计算出这个角度

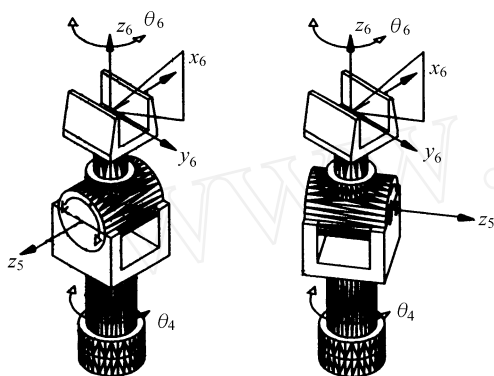


图6 协调角的确定

Fig. 6 Determination of coordinate angle

当 z_5 与 ω_y 同向时:

$$\omega_x = \omega_y \sin \theta_5, \quad \omega_y = \omega_y \cos \theta_5$$

由式(13)知: $\dot{\theta}_5 = \omega$ 假设 $\dot{\theta}_4 = 0$, 由式(14)得:

$$\dot{\theta}_6 = \omega_y$$

5.3 协调控制方法^[9]

实时控制过程中,当 $|\theta_5| = \alpha$ 时,说明机器人已接近奇异形位,这时需要停止原来的分解速度控制方式,进入协调控制 计算 z_4 与轴 ω_y 的夹角 γ ,让关节4绕 z_4 以最大安全速度转过 γ 角,同时让关节6绕 z_6 以相反的方向及最大安全速度转过 γ 角 转过 γ 角之后,以 $\dot{\theta}_4 = 0$, $\dot{\theta}_5 = \omega$, $\dot{\theta}_6 = \omega_y$ 的速度旋转 计算 θ_5 ,当 $|\theta_5| = \alpha$ 时,进入正常分解速度控制

需要指出,协调运动前后关节速度会出现不连

续现象,可以通过算法上的线性过渡来加以消除,但协调运动前后的位移是连续的

参考文献:

- [1] Nakamura Y, Hannafusa H. Inverse kinematic solutions with singularity robustness for robot manipulator control[J]. *ASME Dynam System Measurement control*, 1986, 108: 163- 171.
- [2] Wampler CW. Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods[J]. *IEEE Trans Sys Man Cybernet*, 1986, 16(1): 93- 101.
- [3] Chen Y C, Seng J, Neil O. A predicative algorithm for rate control of mechanisms near singularities[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1998, 17(6): 652- 666.
- [4] Cheng F T, Hour T L, Sun Y Y. Study and resolution of singularities for a 6-DOF PUMA manipulator [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1997, 27(2): 165- 178.
- [5] Gregory L, Richard P. Singularity avoidance and the control of an eight-revolute-joint manipulator [J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1997, 16(1): 60- 76.
- [6] Seng J, Neil O, Kevin A, et al. Escapability of singular configuration for redundant manipulators via self-motion[A]. *Proceedings of the 1995 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Part 3* [C]. New York: IEEE Press, 1995. 78- 83.
- [7] Manja V K, Mirko D B. Symbolic singular value decomposition for a PUMA robot and its application to a robot operation near singularities[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1993, 12(5): 460 - 472.
- [8] 朱向阳, 钟秉林, 熊有伦. 机器人运动学反解中的奇异点处理[J]. *机器人*, 1996, 18(5): 23- 28.
ZHU Xiang-yang, ZHONG Bing-lin, XIONG You-lun. Singularities treatment for manipulator inverse kinematics evaluation[J]. *Robot*, 1996, 18(5): 23- 28.
- [9] 邹婷, 陆震. 采用协调控制法回避机械手的奇异形位[J]. *机器人*, 1994, 16(4): 19- 24.
ZOU Ting, LU Zen. Avoiding singularities of manipulators with the method of motion coordinational control[J]. *Robot*, 1994, 16(4): 19- 24.