

# 机械结构动力优化振型反问题求解的逆摄动方法

上海交通大学机械与动力工程学院 苗玉彬 饒其新 刘成良  
大连理工大学机械工程学院 屈福政

**摘要:** 通过对振型反问题的研究, 提出了振型反问题求解的逆摄动方法, 并给出了相应的逆摄动参数取值方法。同传统的求解方法如罚函数法和变尺度法等相比。该方法还可避免或减少重分析, 提高计算效率, 算例表明, 这种方法是有效可行的。

**关键词:** 动力优化; 振型; 反问题; 逆摄动; 方法

**Abstract:** This paper defines inverse vibration mode problems, proposes inverse perturbation method to solve them and shows how to determine the parameter. Compared to traditional methods such as penalty function and variable-metric methods, inverse perturbation method can reduce or even avoid reanalysis time and increase computing efficiency. An example is given to show that this method is effective and feasible.

**Key words:** kinetics optimization; vibration mode; inverse problem; inverse perturbation; method

机械结构动力优化主要包括 3 方面内容: (1) 固有频率问题, 可归结为带频率约束或广义特征值反问题。(2) 振型问题, 可归结为特征向量反问题。(3) 动力响应振幅 (或称动柔度、动刚度) 问题, 可归结为带动力响应约束的动力优化问题或动力响应振幅反问题。

随着结构动力优化的发展, 人们开始对具有振型要求的结构优化问题进行探讨, 使用的方法主要为混合罚函数法、变尺度法中的 DFP 法以及约束变尺度法 CVM 等, 求解的过程中需要反复进行结构重分析, 计算效率不高。为此, 本文在前期研究工作的基础上, 提出了结构动力优化振型反问题求解的逆摄动方法, 并给出了相应的逆摄动参数取值方法。

## 1 振型反问题的定义

机械结构动力优化反问题是指对原结构的频率和振型在某些节点上的值提出一些合理的要求, 要求能指示出在指定的位置或在允许修改的部位应作怎样的修改。反问题在问题提得比较合理时, 解往往不是唯一的。不过实际机械系统或工程结构往往只对某些点或某一点的动力响应振型有所限制, 除此而外的其他点并不作过多限制, 这就为进行振型反问题的求解带来了便利。

《起重运输机械》 2004 (2)

考虑线性结构的固有振动问题。设  $K$  和  $M$  为结构刚度矩阵和质量矩阵,  $\omega$  为固有频率, 特征值  $\lambda = \omega^2$ 。设  $\phi$  为振型向量或模态向量, 则相应的动力学特征方程为

$$K \phi = M \phi \lambda \quad (1)$$

若将刚度矩阵  $K$  和质量矩阵  $M$  表示为设计变量  $X (x_1, x_2, \dots, x_m)$  的线性函数, 即

$$K(X) = K_0 + \sum_{i=1}^m x_i K_i \quad (2)$$

$$M(X) = M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \quad (3)$$

式中  $K_0$ 、 $M_0$  ——初始模型的有限元刚度矩阵和质量矩阵

$K_i$ 、 $M_i$  ——有限元单元参数完全相同的所有单元组成的单元刚度阵和单元质量阵,  $i = 1, \dots, m$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$$

振型反问题可以描述为给定振型  $\phi^* = (\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$ , 求一组设计变量  $X(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ , 使

$$K(X) \phi^* = M(X) \phi^* \lambda^* \quad (4)$$

通常  $\lambda^*$  可依据设计要求给定或通过测量和计算得到。

## 2 振型反问题求解的逆摄动方法

### 2.1 振型增量公式

1 个  $n$  自由度的弹性体系有  $n$  个固有振型, 即主振型。主振型有 1 个重要特性, 就是关于质量阵或刚度阵的正交性, 即

$${}^T_j M_j = 0; \quad {}^T_j K_j = 0 \quad (5)$$

正交关系是特征向量必须满足的条件。同时, 如果  $j$  与  $M$  阵之间具有以下关系, 即

$${}^T_j M_j = \frac{1}{M_{jj}} {}^T_j M_j = \frac{1}{M_{jj}} M_{jj} = 1 \quad (6)$$

$${}^T_j K_j = \frac{1}{M_{jj}} {}^T_j K_j = \frac{1}{M_{jj}} K_{jj} = \omega_j^2 \quad (7)$$

则称其为关于  $M$  阵规一化的振型或  $M$  阵规一振型, 也称正则振型。这里  $K = {}^T K$  和  $M = {}^T M$  分别称为模态刚度阵和模态质量阵, 都是对角阵。灵敏度分析可以找出结构修改的部位和内容, 设振型的灵敏度  $\partial_j / \partial x_i$  是  $j = (j=1, 2, \dots, n)$  的线性组合,  $x_i$  是设计变量。令

$$\frac{\partial_j}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \quad (8)$$

式中  $\alpha_{il}$  ——线性组合系数向量

$$\frac{\partial_j}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \quad (9)$$

则由式 (1) 可得到振型对结构参数的偏导, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial_j}{\partial x_i} &= \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \\ \alpha_{il} &= \frac{1}{l} \left[ \frac{\partial K}{\partial x_i} - \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial x_i} \right]_{j/l} \quad (l=1, 2, \dots, n; l \neq j) \\ \alpha_{ij} &= -\frac{1}{2} \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial x_i} \quad (l=j) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式 (10) 改写成差分形式, 即振型增量公式

$$j = \begin{cases} \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial K}{\partial x_i} - \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial x_i} \right)_{j/l} \alpha_{il} \\ -\frac{1}{2} \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial x_i} \quad (l=j) \end{cases} \quad (11)$$

其中, 振型增量  $\Delta_j$  为给定许用振型分量值  $j^*$  与结构响应振型分量值  $j$  (均指规一化后的正则模态) 之差, 即

$$\Delta_j = j^* - j \quad (12)$$

## 2.2 振型反问题逆摄动求解

设  $k$  为迭代次数, 并设在第  $k+1$  次迭代时, 设计变量  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ 。  $n$  为设计变量个数) 的逆摄动参数为  $(i^{(k+1)})$ , 则有

$$x_i^{(k+1)} = (1 + i^{(k+1)}) \cdot x_i^{(k)} = x_i^{(k)} + i^{(k+1)} \cdot x_i^{(k)} \quad (13)$$

令  $K(x_i^k) = K^k$ ,  $M(x_i^k) = M^k$ , 则有

$$\begin{aligned} K^{(k+1)} &= K(x_i^{(k+1)}) - K(x_i^{(k)}) \\ &= K(x_i^{(k)} + i^{(k+1)} x_i^{(k)}) - K(x_i^{(k)}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} M^{(k+1)} &= M(x_i^{(k+1)}) - M(x_i^{(k)}) \\ &= M(x_i^{(k)} + i^{(k+1)} x_i^{(k)}) - M(x_i^{(k)}) \end{aligned} \quad (15)$$

用式(11)、式(12)、式(13)、式(14)和式(15)求逆摄动参数  $(i^{(k+1)})$  值, 进而通过式(13)求得新的设计变量, 依此迭代求解, 可获得原问题的解。但上述方程组是含  $(i^{(k+1)})$  的非线性方程组, 求解过程非常繁琐, 难以达到实用化。再将式(14)和式(15)变换为

$$K^{(k+1)} = f_K(i^{(k+1)}) \cdot K(x_i^k) \quad (16)$$

$$M^{(k+1)} = f_M(i^{(k+1)}) \cdot M(x_i^k) \quad (17)$$

式中  $K(x_i^k)$  ——不依赖于逆摄动参数  $(i^{(k+1)})$  的结构刚度阵

$M(x_i^k)$  ——不依赖于逆摄动参数  $(i^{(k+1)})$  的结构质量阵

$f_K, f_M$  ——函数符号

将设计变量的逆摄动参数  $(i^{(k+1)})$  分离于原刚度阵和质量阵之外, 则可以将其隐函数关系, 即上式的左端项变为逆摄动参数  $(i^{(k+1)})$  与某种特定形式的结构刚度阵  $K(x_i^k)$ 、结构质量阵  $M(x_i^k)$  (简记为  $K^k, M^k$ ) 的乘积关系 ——显函数表达式, 以免重新组集刚度阵与质量阵。再进一步简化, 略去  $f_K(i^{(k+1)})$  和  $f_M(i^{(k+1)})$  中逆摄动参数  $(i^{(k+1)})$  的高次项, 则可将其非线性方程组简化为线性方程组, 从而简化了迭代求解的过程。

上述振型反问题的逆摄动参数  $(i^{(k+1)})$  值 (设计变量  $X$ ) 是通过已知振型增量逆求得到的, 因此可称其为振型反问题求解的逆摄动方法。

## 3 逆摄动参数 $(i^{(k+1)})$ 的取值方法

根据有限元模型刚度阵和质量阵的分解特性, 可以将逆摄动参数  $(i^{(k+1)})$  从原刚度阵和质量阵中分离出来, 形成显式表达式, 避免重新组合刚度阵和质量阵, 为逆摄动参数的求解带来极大的方便。假设所有类型的设计变量或同一类型设计变量的不同分量均取同一值, 由式(10)、式(11)可给出逆摄动参数的解析计算公式

$${}^{(k+1)} = \frac{{}^{(k+1)}}{n \left[ \sum_{i=1}^n \frac{T_l^{(k)3} K_i^{(k)} \left( \frac{{}^{(k)}}{j} - \frac{{}^{(k)}}{l} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{T_l^{(k)3} M_i^{(k)} \left( \frac{{}^{(k)}}{j} - \frac{{}^{(k)}}{l} \right) \right] \left( \frac{{}^{(k)}}{j} \right)} - \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{T_l^{(k)3} M_i^{(k)} \left( \frac{{}^{(k)}}{j} \right) \right] \left( \frac{{}^{(k)}}{j} \right)} \quad (18)$$

式中  ${}^{(k+1)}$  ——第  $j$  阶振型的增量  
 $\left( \frac{{}^{(k)}}{j} \right)$  ——第  $j$  阶振型  
 $\left( \frac{{}^{(k)}}{j} \right)$  ——第  $j$  阶特征值  
 $K_i$ 、 $M_i$  ——不依赖于摄动参数的结构刚度阵和质量阵,  $i = 1, 2, 3$

采用对所有摄动设计变量取同一逆摄动参数值的方法, 尽管避免了反问题求解的不定性, 简化了计算, 但却不一定能满足实际工程的要求。因而在实际工程问题中, 尚需对此逆摄动参数进行处理, 以解决不同设计变量  $x_i$  取不同逆摄动参数值的问题。由于振型对设计变量灵敏度的大小, 表明了设计变量的改变对振型改变的影响程度, 所以可根据振型对设计变量  $x_j$  的灵敏度值对  ${}^{(k+1)}$  进行调整分配, 来获取  $\left( \frac{{}^{(k+1)}}{j} \right)$ 。给出如下求取各设计变量  $x_i$  对应逆摄动参数值的计算公式

$$\left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right) = \left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right) \left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right) \quad (19)$$

式中  $\left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right)$  ——修正系数

$$\left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right) = \frac{|j_i|}{\sum_{i=1}^n |j_i|} \quad (20)$$

$j_i$  —— $j$  阶特征值对第  $i$  个设计变量的灵敏度

$$j_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (21)$$

式 (21) 中  $\left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right)$  只取正值, 只起到放大或缩小的修正作用, 是 1 个针对平均灵敏度值作归一化后得到的比例系数。

若考虑设计变量的边界约束, 则可按下式选取修正系数  $\left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right)$  的值, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{{}^{(k+1)}}{j} \right) = \min \left\{ \left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right), \frac{X_{i\max} - X_i^{(k)}}{X_i^{(k)} \cdot i_{\max}} \right\} \quad \text{当 } \left( \frac{{}^{(k+1)}}{i_{\max}} \right) > 0 \text{ 时} \\ \left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right) = 0 \quad \text{当 } \left( \frac{{}^{(k+1)}}{i_{\max}} \right) = 0 \text{ 时} \\ \left( \frac{{}^{(k+1)}}{j} \right) = \min \left\{ \left( \frac{{}^{(k+1)}}{i} \right), \frac{X_{i\min} - X_i^{(k)}}{X_i^{(k)} \cdot i_{\max}} \right\} \quad \text{当 } \left( \frac{{}^{(k+1)}}{i_{\max}} \right) < 0 \text{ 时} \end{array} \right. \quad (22)$$

#### 4 算例

已知模型中有 5 个梁单元。每一单元的长度为《起重运输机械》2004 (2)

200 mm, 弹性模量  $E = 2.0684 \times 10^5$  MPa, 泊松比  $\nu = 0.3$ , 密度  $\rho = 7833.4$  kg/m<sup>3</sup>。并设各单元初始截面积为  $b \times h = 100$  mm  $\times$  50 mm, 取单元截面厚度  $h$  为设计变量  $X$  ( $b$  为单元截面宽度)。现只考虑第 3 阶振型, 并使其按 11.3 项进行规一化 (第 3 阶振型节点 6 处的横向位移值为 1)。要求节点 2 处的横向位移  $w_{3,3}$  由初始结构对应的 0.6048 改为 0.5175, 其他振型与频率不加限制, 分析后得到初始结构的特征值和第 3 阶振型如表 1、表 2。

表 1 悬臂梁初始结构的各阶特征值  $10^7 \text{ rad}^2/\text{s}^2$

阶数	1	2	3	4	5
特征值	0.0068	0.2673	2.1091	8.2307	22.6737
阶数	6	7	8	9	10
特征值	62.5757	133.8447	281.4942	568.0650	1229.2908

利用文中提供的逆摄动方法进行求解, 迭代求解过程如表 3、图 1 所示, 最终计算结果见图 2, 表 4 给出了本文结果同文献 [12] 结果的对比。该方法只需 4 次迭代计算即可获得问题的解, 且结果要优于文献 [12] 用数学规划法求解获得的结果。另外, 用有限元分析软件 MSC/MASTRAN 的计算结果也验证了本文结果的正确性。

由此可见, 逆摄动法在解决振型反问题时不仅迭代次数较少, 而且一般除计算开始和最后验证需有限元分析外, 其他迭代都不需要重分析。

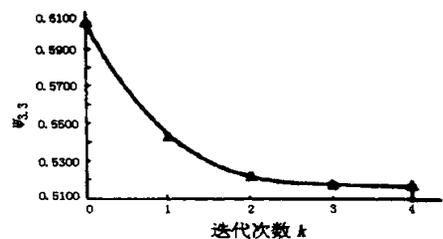


图 1 悬臂梁第 3 阶振型在节点 2 处的横向位移  $w_{3,3}$  随迭代过程的变化

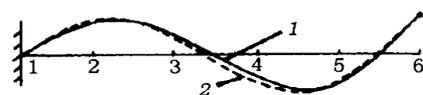


图 2 悬臂梁的第 3 阶振型  
 1. 修改前的  $w_{3,3}$  2. 修改后的  $w_{3,3}$

表2 悬臂梁初始结构的第3阶振型 ( $x_{1,3} = x_{2,3} = 0$ )

节点	2		3		4		5		6	
方向	3,3	4,3	5,3	6,3	7,3	8,3	9,3	10,3	11,3	12,3
幅值	0.6048	0.0031	0.5267	-0.0041	-0.4736	-0.0038	-0.3957	0.0047	1.0000	0.0079

表3 第3阶振型节点2处横向位移满足指定值的迭代过程

迭代次数 $k$	$x_1/mm$	$x_2/mm$	$x_3/mm$	$x_4/mm$	$x_5/mm$	3,3	重分析否
1	55.6090	54.3804	49.7955	49.9666	48.7833	0.5432	Y
2	57.2593	56.0309	49.2809	46.1823	48.4067	0.5223	N
3	57.5735	56.3635	49.1574	46.0359	48.3340	0.5175	N
4	57.6137	56.4064	49.1410	46.0172	48.3247	0.5175	Y

表4 计算结果对比

	$x_1/mm$	$x_2/mm$	$x_3/mm$	$x_4/mm$	$x_5/mm$	3,3
本文结果	57.6137	56.4064	49.1410	46.0172	48.3247	0.5175
文献 [12]	67.1650	55.4250	51.7900	48.6500	48.6450	0.4826
MSC/NASTRAN	57.6137	56.4064	49.1410	46.0172	48.3247	0.5175

## 5 小结

以平面弯曲振动的悬臂梁为例，对振型反问题进行了逆摄动求解。算例表明，逆摄动方法用于振型反问题的求解是有效的，可以显著减少重分析的次数。通过给出逆摄动参数的解析计算公式，既获得了的取值方法，也避免了对刚度矩阵的重新组集，提高了计算效率。但振型是一列向量，因而求解时必须针对这一特点，找出所有与节点位移相关的子项。

### 参考文献

- 林家浩. 有频率禁区的结构优化设计. 大连工学院学报, 1981, 20 (1): 27—36
- 王生洪. 具有频率约束的结构优化设计. 固体力学学报, 1982, 2 (2): 165—175
- Ramana G. Structural optimization with frequency constraints-A review. J. AIAA, 1993, 31 (12): 2296—2303
- 陈建军, 车建文, 陈勇. 具有频率和振型概率约束的工程结构动力优化设计. 计算力学学报, 2001, 18 (1): 74—80
- Jaroslav A C, Stanislav A L. Multimodal optimization of space

frames for maximum frequency. Computers and Structures, 1998, 66 (2-3): 187 - 199

- 陈集丰. 给定振型和振型节点位置的结构优化设计. 计算结构力学及其应用, 1987, 4 (2): 88—94
- 陈怀海, 周传荣. 一种满足多阶固有频率和节线位置要求的结构动力学设计方法. 应用力学学报, 1996, 18 (1): 59—63
- 苗玉彬, 屈福政, 滕弘飞. 结构静力反问题求解的逆摄动算法. 大连理工大学学报, 2001, 41 (1): 67—72
- 苗玉彬, 滕弘飞, 丁金华等. 基于梁单元有限元分析的特征值反问题求解的逆摄动方法. 计算力学学报, 2001, 18 (1): 48—55
- 黄光远, 刘维倩, 刘小军. 反问题与计算力学. 计算结构力学及其应用, 1993, 10 (3): 302—306
- 于德介. 一种结构固有频率与局部振型修改方法. 机械强度, 1998, 20 (1): 26—29
- Ki-Ook Kim, William J. Anderson, Robert E Sandstom. Nonlinear Inverse Perturbation Method in Dynamic Analysis. AIAA Journal, 1983, 21 (9) 1310—1316

作者: 苗玉彬  
地址: 上海市华山路 1954 号  
邮编: 200030