文章编号: 1002-0446(2001)07-0598-03

轮式移动机器人WMR 的运动分析*

付 庄 刘成良 殷跃红 曹其新 马培荪
(上海交通大学机器人研究所 200030)

摘 要: 研究了轮式移动机器人(WMR)的运动问题, 分析了一种理想滚动情况下航向角控制的差动运动模型. 通过算例证明该方法简单实用, 在轮式移动机器人的路径规划与定位控制中有一定的参考价值.

关键词: 轮式移动机器人; 运动学; 差动控制
中图分类号: TP24 **文献标识码**: B

THE MOTION ANALYSIS OF WHEELED MOBILE ROBOT

FU Zhuang LIU Cheng-liang YIN Yue-hong CAO Qi-xin MA Pei-sun
(*Research Institute of Robotics, Shanghai Jiaotong University* 200030)

Abstract: This paper studies the problem of modeling on the kinematics for wheeled mobile robots (WMR), and analyses a differential-steering kinematics model in the case of the ideal rolling in order to fulfil a steering angle control. The examples prove that this method is very simple and practical. It also shows the reference value in the path planning and positioning applications.

Keywords: WMR, Kinematics, Differential-steering

1 引言(Introduction)

众所周知, 关于轮式移动载体的运动学工程近似方法的一些研究在很大程度上只是针对一般的车辆[1~5]. 随着计算机与传感器技术的发展, Whitaker (1962)、Lewis、Bejezy (1973)、Giralt (1979)、Iijima (1981)、Helmers (1983)、Johnson (1984)、Moravec (1986) 和 Wilfong (1988) 等许多学者都对轮式移动机器人(WMR)的运动机构进行了研究. 1987 年, Nuir 和 Neuma[7] 提出了一种研究WMR 运动学问题的方法: 先对每个轮子的运动建模, 再合并这些信息去描述整个WMR 的运动. 直到 1989 年 Alexande 与 Maddocks[6, 8] 才在原来的基础上, 对WMR 的运动学问题进行了较详尽的阐述. 本文通过对WMR 运动的研究, 分析了一种差动控制模型, 从而为服务机器人的路径规划和定位控制提供了理论依据.

2 WMR 的运动分析(Movement analysis of WMR)[6~8]

研究WMR 运动学的目的之一是通过改变轮子的运动速度或方向使其进行姿态调整.

2.1 符号与定义

假定研究对象是有一个固定轴和几个转动轴的轮式移动机器人(WMR)刚体, 其运动是低速情况下水平匀速滚动, 且携带一个小车参考坐标系, 该坐标系上的坐标表示为 ${}^{B}x = (x_b, y_b)$, 二维空间参考坐标系上的坐标表示为 ${}^{R}x = (x, y)$. ${}^{R}x$ 是一个时变函数, ${}^{B}x$ 可通过观察得到. 轮子理想化为一个半径为 R 的薄圆盘, 它可以围绕通过中心的轴线旋转. 我们定义WMR 每个轮子轴线的转动点为受限点, 定义在受限点速度的方向为受限方向.

于是WMR 刚体的性质可如下表达

$$\left| {}^{R}x_i(t) - {}^{R}x_j(t) \right| = \left| {}^{B}x_i(t) - {}^{B}x_j(t) \right| = 0 \quad (i, j = 1, \cdots, m) \tag{1}$$

引入受限点速度 $v_i(t) = {}^{R}v_i(t) = {}^{R}\dot{x}_i(t)$, 则上式

* 基金项目: 中国博士后科学基金资助项目.
收稿日期: 2001-08-01

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

可被重写为如下

$$(x_i(t) - x_j(t))(v_i(t) - v_j(t)) = 0 \quad (i, j, = 1, \cdots, m) \tag{2}$$

设 α_{ij} 表示 x_b 与 $x_i x_j$ 两点连线之间的夹角, 则有

$$|v_i|\sin({}^B\theta_i - \alpha_{ij}) - |v_j|\sin({}^B\theta_j - \alpha_{ij}) = 0 \tag{3}$$

(2) 式说明WMR 作为一个平面刚体其瞬间运动是关于某一瞬间转动中心(ICR)的纯转动或纯滚动. 设WMR 的轮子角速度 ω 是三维向量, 其二维水平分量为 a_i, 模为 ρ_i. a_i 关于WMR 上的参考方向 x_b 及关于三维空间的参考方向 x 的夹角分别为 ${}^B\theta_i$ 和 ${}^R\theta_i$ (逆时针为正方向, ${}^B\theta_i, {}^R\theta_i \in [-\pi, \pi]$). 设 θ 是 x_b 与 x 之间的夹角. 定义轮子驾驶角速度为 ${}^B\omega = {}^B\theta_i'$, 定义WMR 关于空间参考坐标系的角速度 Ω 为 $\theta(t)'$. 于是

$${}^R\theta_i(t) = \theta(t) + {}^B\theta_i(t) \tag{4}$$

对上式求导有

$${}^R\omega_i(t) = \Omega(t) + {}^B\omega_i(t) \tag{5}$$

2.2 滚动的一致性条件

滚动时受限点速度 v_i 和向量 a_i 成 $\pi/2$ 角且 $|v_i| = 2\pi R_i|a_i| = 2\pi R_i\rho_i$. 引入单位垂直向量 k, 则向量 a_i 与 v_i 在三维空间中满足 $v_i = 2\pi R_i a_i \times k$. 如瞬间平移 ($\Omega = 0, a_i = a_j$), 向量 a_i 必与平移路径垂直. 如WMR 以角速度 $\Omega(\Omega \neq 0)$ 旋转, 瞬间转动中心(ICR)位于

$$x_i + 2\pi R_i a_i \Omega^{-1} \tag{6}$$

为了简化且不失一般性, 令 R_i 等于 $1/2\pi$, 代表向量 v_i 的换算系数(实际应用中, 下文所有的 ρ_i 都要乘以 $2\pi R_i$, 才表示线速度 v_i). 从上式得知任何两个轮子 i 和 j 必然满足以下滚动的一致性条件:

$$\Omega(x_i - x_j) = a_j - a_i \tag{7}$$

可见一旦 x_i、x_j 和 a_i、a_j 给定, Ω 也相应确定了 ($x_i \neq x_j$)

$$\Omega = (a_j - a_i)/(x_i - x_j) = -|x_i - x_j|^{-2}(a_i - a_j)(x_i - x_j) \tag{8}$$

2.3 带驾驶轮的WMR 刚体运动学建模

根据小车参考坐标系(VRCS)中的向量 a_i 与受限点 x_i, 可以给出WMR 在二维空间参考坐标系(SRCS)中的状态方程

由于 ${}^R x_i' = v_i$, 且 v_i 可以用 ρ_i、${}^B\theta_i$ 和 θ 表示, 则状态方程为

$${}^R x_i' = \rho_i(\sin({}^B\theta_i + \theta), -\cos({}^B\theta_i + \theta)) \tag{9}$$

$$\theta' = -x_{ij}^{-1}[\rho_i\cos({}^B\theta_i - \alpha_{ij}) - \rho_i\cos({}^B\theta_j - \alpha_{ij})] \tag{10}$$

其中 x_{ij} 表示 ${}^B x_i {}^B x_j$ 之间的距离. 可见, 如果知道一系列初始条件, 就可以决定WMR 的位置与方向. 如 θ 和 ρ_i 是时变函数, 则上式是参数耦合的超越方程. 另外, ${}^R x_j$ 也可以由下式得到

$${}^R x_j = {}^R x_i + x_{ij}(\cos(\alpha_{ij} + \theta), \sin(\alpha_{ij} + \theta))$$

求导, 有

$${}^R x_j' = {}^R x_i' + x_{ij}\theta'(-\sin(\alpha_{ij} + \theta), \cos(\alpha_{ij} + \theta)) \tag{11}$$

于是反运动学方程为

$$\rho_j = (\rho_i^2 + (x_{ij}\theta')^2 - 2\rho_i x_{ij}\theta'\cos({}^B\theta_i - \alpha_{ij}))^{1/2} \tag{12a}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\rho_i\sin\beta_i - x_{ij}\theta'\sin(\alpha_{ij} + \theta)}{\rho_i\cos\beta_i - x_{ij}\theta'\cos(\alpha_{ij} + \theta)}\right) \tag{12b}$$

其中 ${}^B\theta_i = \beta_i - \theta$. 上式没有引入微分方程就得到了参数 ρ_i 和 ${}^B\theta_i$ 的表达式, 但其中各种三角函数关系仍然很繁琐.

2.4 WMR 航向角与转速控制的算例

WMR 运动学中最简单实际的问题之一是机器人的姿态调整问题. 以配有两个速度与航向角均可控的三轮车为例(另一个轮子是随动轮). 要求选一简单轨迹使 ${}^R x_1$ 在单位时间内匀速地沿 $y = x$ 从点 $(0, 0)$ 运动到点 (h, h), 同时改变WMR 的航向角从 $\theta(0) = \theta^0$ 到 $\theta(1) = \theta^1$. 于是构造

$${}^R x_1 = (0, 0) + t(h, h), \theta(t) = \theta^0(1 - t) + t\theta^1 \tag{13}$$

由于 $\rho_1 = |{}^R x_1'| = \sqrt{2}h$, ${}^B\theta_1 = \beta_1 - \theta(t) = -\theta(t)$, 从(12)式得另一个轮子的参数为

$$\rho_2 = (2h^2 + (x_{12}(\theta^1 - \theta^0))^2 - 2\sqrt{2}hx_{12}(\theta^1 - \theta^0)\cos(\alpha_{12} + \theta(t)))^{1/2}$$

$${}^B\theta_2 = -\theta(t) - \tan^{-1}\left(\frac{x_{12}(\theta^1 - \theta^0)\sin(\alpha_{12} + \theta(t))}{\sqrt{2}h - x_{12}(\theta^1 - \theta^0)\cos(\alpha_{12} + \theta(t))}\right)$$

其中, x_{12} 与 α_{12} 的意义同上. 如上式不满足则有滑动发生.

3 WMR 差动运动模型(WMR differential movement model)

3.1 建模

上面给出了航向角 ${}^B\theta_i$ 与转速 ρ_i 的表达式, 为有驾驶轮的WMR 控制提供了一种方法. 分析发现上述方法不但繁琐而且使机构复杂化、开发成本高. 那么能否仅利用轮子的差速实现航向角的控制呢?

如图 1 所示, WMR 的轮子 1、2 分别被两个电机

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

驱动且与 x_b 轴平行, 轮子 3 是随动轮. 差动状态如图 2 所示.

则 $x_i' = \rho_i \cos(\theta)$, $y_i' = \rho_i \sin(\theta)$. 又 ${}^R x_i = (x_i, y_i)$, $|{}^R x_i'| = \rho_i$, $(i = 1, 2)$.

所以有

$$\theta' = (\rho_2 - \rho_1)/x_{12} \tag{14}$$

由上式得

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_1^2 + x_{12}^2(\theta')^2} \tag{15}$$

此反运动学方程显然简单得多.

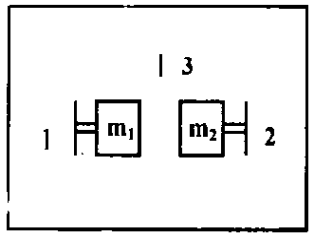

图 1 WMR 的轮式结构

Fig. 1 The wheeled configuration of the WMR

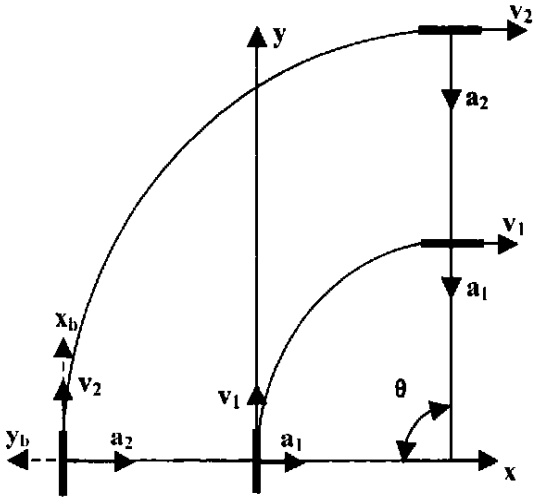

图 2 差动状态

Fig. 2 Differential-steering state

3.2 差动控制算例

以一个三轮WMR 为例(两个轮子的速度可控, 另一个是随动轮). 轨迹起点终点的要求同上例, 则也有方程(12). 又

$$\rho_1 = |{}^R x_1'| = \sqrt{2}\,h \tag{16a}$$

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_1^2 + x_{12}^2(\theta')^2} = \sqrt{2h^2 + x_{12}^2(\theta^1 - \theta^0)^2} \tag{16b}$$

这个例子给出WMR 右转的情况, 同理可以给出左转、左后转与右后转的情况.

可见, 对于给定了起点与终点构造了一定轨迹的WMR, 只要按上述方法求出 ρ_1 与 ρ_2, 分别对两个电机的速度使用 PID 闭环调节, 即可通过差速实现航向角的控制. 实践证明该模型对WMR 的姿态调整非常实用.

5 结论(Conclusion)

本文分析了一种理想情况下WMR 差动运动学模型, 通过控制两个轮子的速度差实现了航向角的控制, 从而为WMR 的路径规划及姿态调整提供了一种解决方法. 实际上由于加工工艺及载重的影响, x_{12} 与 R 的给定尺寸常常有偏差, 同时路况的影响及速度的变化使橡胶轮半径R 也是一个时变函数. 因此我们将另行讨论差动运动学模型的补偿问题.

参考文献 (References)

1 American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO). Policy On Geometric Design of Highways, Washington, DC, 1984

2 American Trucking Association Inc, How big is a truck-how sharp does it turn, Washington, DC, 1974

3 M Sayerss. Vehicle off-tracking models, Symposium of Geometric Design for Large Trucks Denver CO, August, 1985: 5- 7

4 Society of Automotive Engineers SAE J695, Turning ability and offtracking in SAE Handbook. Warrendale, PA

5 Western Highway Institute. Offtracking Characteristics of Trucks and Combinations Report# 3. San Bruno, CA, 1970

6 Alexander J C, Maddocks J H. On the maneuvering of Vehicles SIAM, J Appl Math, 1988: 38- 51

7 Muir P F, Neuman C P. Kinematic modeling of wheeled mobile robots. J Robotic Systems 1987. 281- 333

8 J C Alexander, J H Maddocks. On the Kinematics of Wheeled Mobile Robots. Int J Robot Res, 1988: 15- 27

作者简介:

付 庄 (1972-), 男, 博士后. 研究领域: 机器人、工业自动化与计算机图形学等.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net